木のk段以内平面描画法(数理モデルの解析における組合せ論的様相)

AUTHOR(S):

岩村, 覚三; 中村, 玄

CITATION:

岩村, 覚三 ...[et al]. 木のk段以内平面描画法(数理モデルの解析における組合せ論的様相). 数理解析研究所講究録 1992, 802: 7-11

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/82882

数理解析研究所講究録
802巻 1992年 7-11

木のｋ段以内平面描画法

城西大（理）　岩村　覚三(K. Iwamura)
城西大（理）　中村　　玄（G. Nakamura)

ｱﾌﾞｽﾄﾗｸﾄ

木の最長ﾊﾟｽ長をｍとしたときｋ＝＜（ｍ＋１）／２＞(＜＞は切り上げをしめす）段以内に 平面描画可能であることをしめす。ここで、この上界ｋを実現する最長ﾊﾟｽ長ｍの木が存在する。

次にｋ 段以内に平面描画する多項式ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを二つ提案する。 最後に平面ｸﾞﾗﾌのk段以内平面描画問題　が多項式時間問題であることを主張する。

１・ﾊｼﾞﾒﾆ

１９９０年２月、梶谷ら[4]は「ｋ段に平面描画できるｸﾞﾗﾌの構造に関する研究」において、そのような木をﾏｲﾅｰにより特徴付けようとしてｍ＝４の時に反例に出会った。　著者らは与えられた木がｋ段に平面描画できた状態は最下段に描かれたﾉｰﾄﾞのうち、適当なﾉｰﾄﾞを根としてみると、この木はshelling structure[5]に

なるので、shelling structureとしての構造を利用したﾋｭｰﾘｽﾃｨｯｸなｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを提案したが、「丁度ｋ段に描画可能な木」をshelling structureから特徴付けることができなかった。ところが１９９０年１１月、著者らは「ｋ段以内に描画可能な木、平面ｸﾞﾗﾌ」としてｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑと共に完全に特徴付けることに成功したので報告する。

２・木ﾉk段以内平面描画可能性ﾄｿﾉｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ

与えられた木Ｔは隣接点ﾘｽﾄ[1]で表現されてるものとする。またｋ本の線分は上からｋ段目、（ｋ－１）段目、・・・、１段目と呼ぶ。Ｔの最長ﾊﾟｽ長をｍとする。この木Ｔ＝Ｔ1はｋ＝＜（ｍ＋１）／２＞段に描画可能であることが次の様にして解る。先ず全ての葉を最上段においた後これらを全て刈取る。刈り取った後の木をＴ2と呼ぶ。次にＴ2の全ての葉を上から２段目においた後これらの葉を刈り取る。刈り取った後の木をＴ3とよぶ。以下同様にしてＴkがﾊﾟｽになることが解る。途中Ｔi（１=＜i<k）がﾊﾟｽになったら操作をやめる。このときは（i+1）段に描画可能ということがわかる。このｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを刈ﾘ取ﾘ法とよぶなお、この刈り取り法が多項式時間であることは明か。

次に極小法とよぶｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑをしめす。先ず与えられた木Ｔ＝Ｔ1に刈り取り法を適用して最長ﾊﾟｽＰ1を求め、Ｐ1を１段目におく。Ｔ1よりＰ1を除去して得られる各部分木をＴ2,j（ｊはＰ1上のnodeで１段目に描画した際、左から右に自然についた順序に従って考える）とする。空でない各Ｔ2,jに対しｊに隣接しているＴ2,jのnodeをｎ2,jとする。ｎ2,jを通るＴ2,jの最長ﾊﾟｽＰ2,jを求め、Ｐ2,jを第２段目に置きＴ2,jよりＰ2,jを除いてできる部分木をＴ3,j,lととする。ｎ2,jとｊを隣接させる。以下同様の操作を行う。このようにして段描画された木はどのｎodeもこれ以上、下の段に置けないという意味で極小である。また極小法で用いる段数は刈り取り法の段数以下であることも自明である。極小法は多項式時間ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑである。

最後に＜（ｍ＋１）／２＞段必要な木が存在することを見ていこう。ｍが奇数の場合を考える。偶数の場合も同様。ｍ＝１の時の木Ｔ(1)は図１（１）の通り。ｍ＝３の時は２つのＫ1,3の中心を結んでできた木、図１（２）、がＴ(3)である。ｍ＝５の時は２つのＴ1,32の中心を結んで出来た木をＴ(5)とする。以下同様にＴ(2k-1

)（k＝4，5，．．．）を定義する。さてT(5)を極少法により段描画すれば図２の様になる。この木はどのnodeも低い段へ移すことが出来ず、中央縦線にたいして線対称である。この木は段数最小な３段に描画された木である。この木の葉を刈り取るとT(3)の段数最小な段描画を得る。同様な事が一般のT(2k-1)にたいして成立しているから＜（m＋１）／２＞段必要な最長ﾊﾟｽ長m（mは奇数）の木が存在することがわかった。

３．平面ｸﾞﾗﾌのk段以内平面描画問題

既に[2]において平面ｸﾞﾗﾌの描画が多項式 時間で可能なことが 示されているので、あたえられた平面ｸﾞﾗﾌからﾙｰﾌﾟをなくす様に枝を除いて出来た木に対し本法のいずれかを適用した後、除いた枝を追加すればよいから、原理上多項式時間でとける。

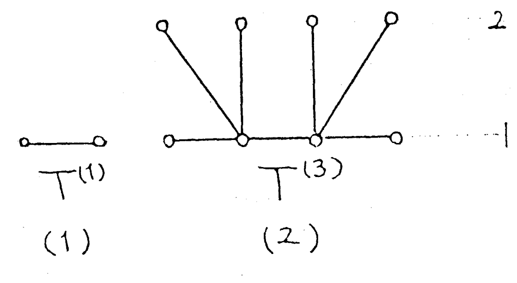

図 1

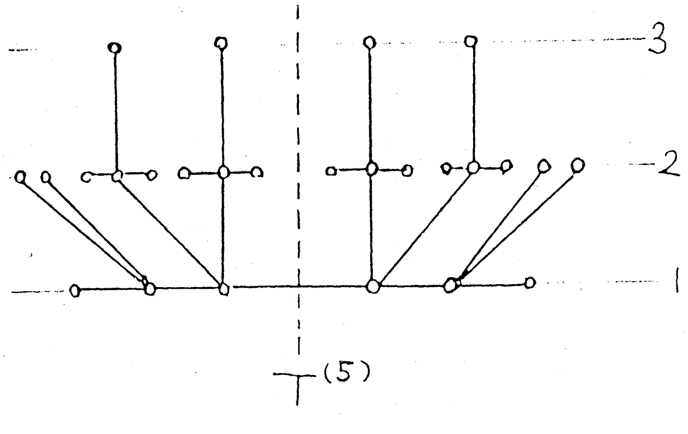

図 2

参考文献

[1]ｴｲﾎ,ﾎｯﾌﾟｸﾛﾌﾄ,ｳﾙﾏﾝ(野崎ら訳);ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑの設計と解析I,ｻｲｴﾝｽ社　１９７７．

[2]R.E.Bixby & D.K.Wagner;An almost linear-time algorithm for graph realization, WP84348-OR, Institute f r konometrie und operations research, Universit t Bonn, 1984.

[3]P.Eades & R.Tamassia;Algorithms for drawing graphs:An annotated bibliography, October 1989.

[4]梶谷洋三、上野修一、福原　近；ｋ段に平面描画できるｸﾞﾗﾌの構造に関する研究、１９９０年２月東京工業大学大学院電気電子工学専攻．

[5]B.Korte & L.Lovasz;Greedoids, a structural framework for the greedy algorithm. in:Pulleyblank,W.R.(ed.): Progress in combinatorial optimization, 221-243(1984) Academic Press.